

Vorlesung 8a

Zweistufige Zufallsexperimente

Teil 1:

Übergangswahrscheinlichkeiten

Stellen wir uns ein zufälliges Paar $X = (X_1, X_2)$ vor,
das auf zweistufige Weise zustande kommt:

es gibt eine **Regel**, die besagt, wie X_2 verteilt ist,
gegeben dass X_1 den Ausgang a_1 hat.

Beispiel A:

In Stufe 1 entscheiden wir uns
entweder für einen fairen Würfel

oder für einen gezinkten:

drei von dessen 6 Seiten sind mit der Augenzahl 5,
die anderen drei sind mit der Augenzahl 6 beschriftet.

X_1 := der Typ des gewählten Würfels (fair oder gezinkt)

X_2 := die dann (in Stufe 2) geworfene Augenzahl.

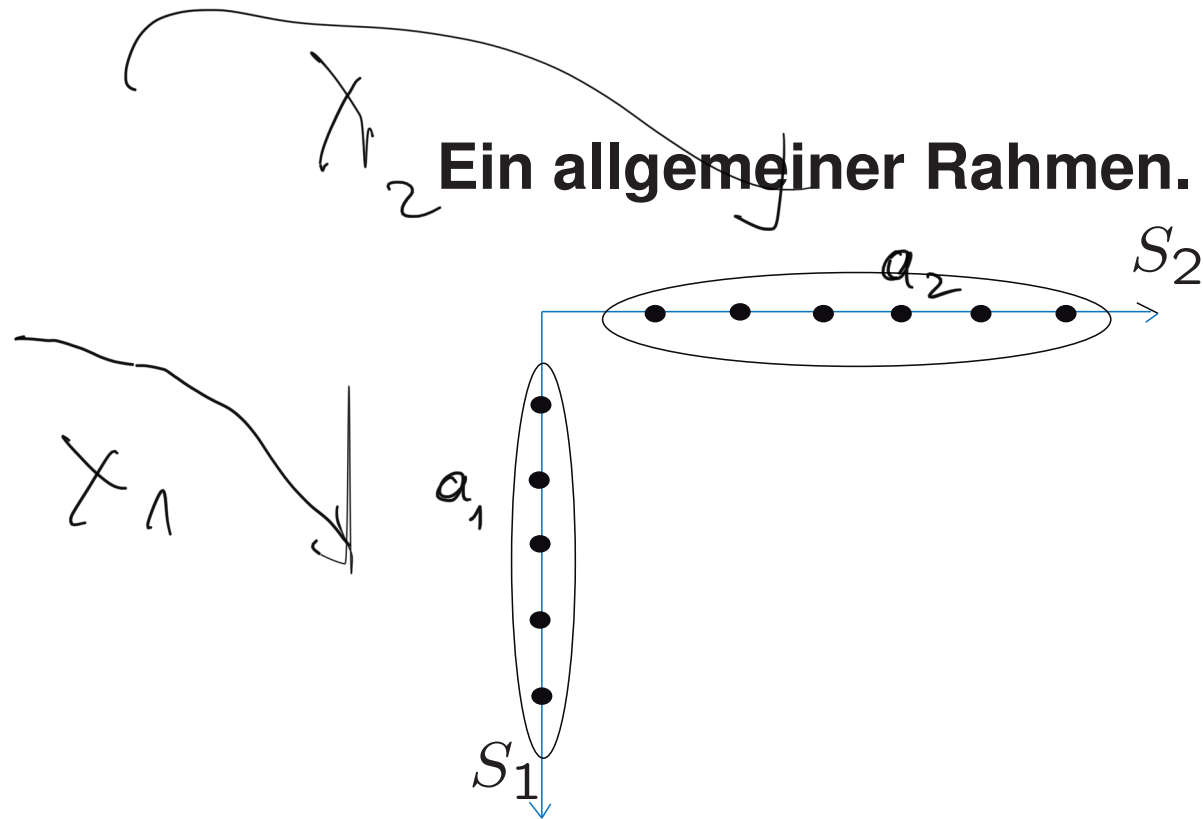
	1	2	3	4	5	6
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Wenn in Stufe 1 der **faire** Würfel gewählt wird,
dann sind die **Verteilungsgewichte** von X_2

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6}$$

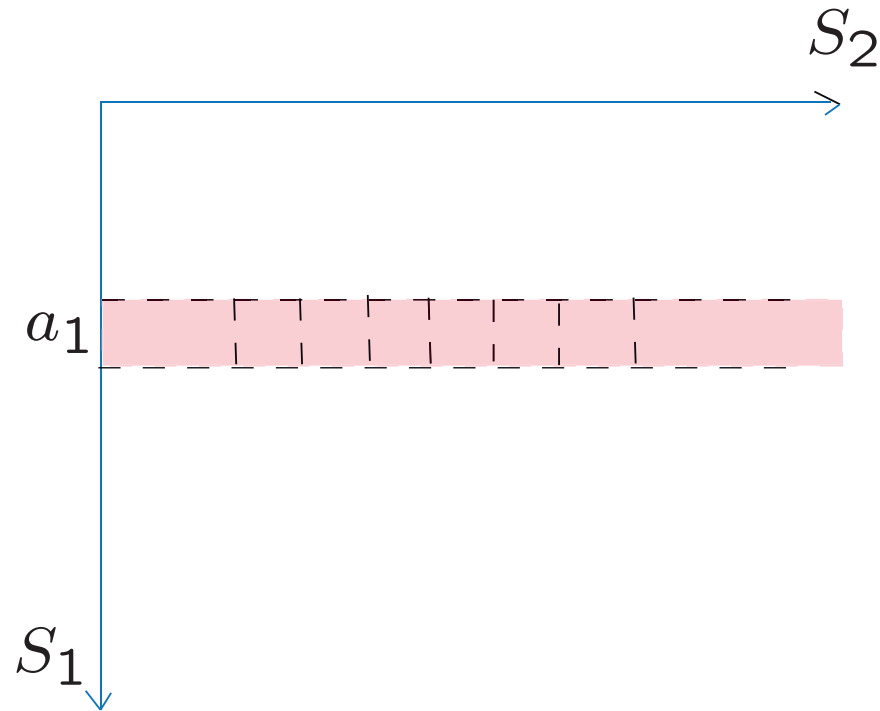
Wenn in Stufe 1 der **gezinkte** Würfel gewählt wird,
dann sind die **Verteilungsgewichte** von X_2

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$



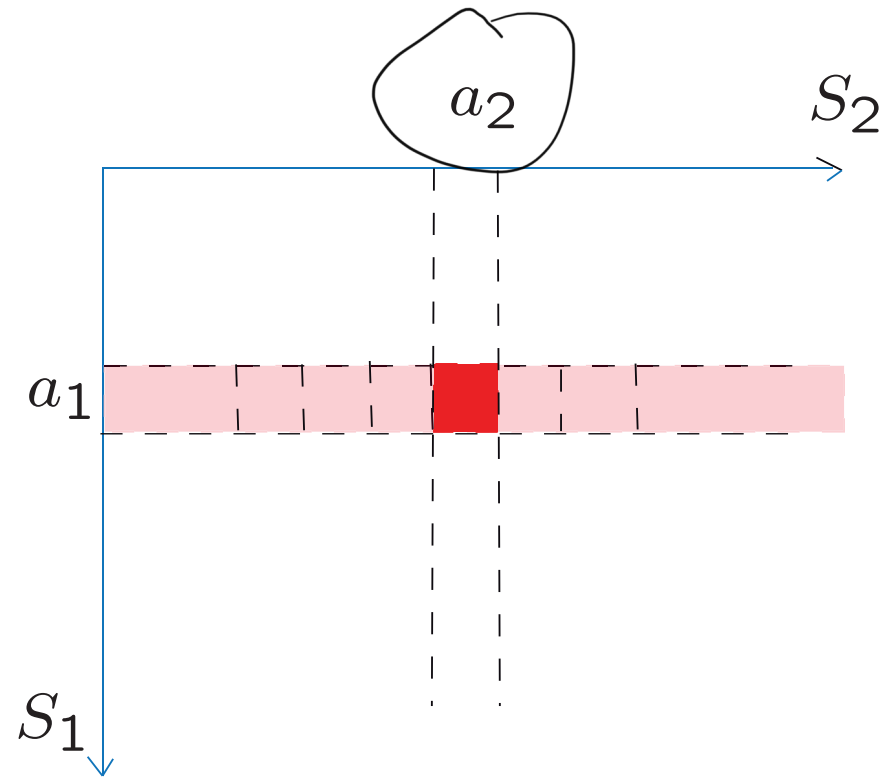
S_1 und S_2 seien zwei Wertebereiche.

Stellen wir uns vor: **Wenn** in Stufe 1
 die Wahl auf das Element $a_1 \in S_1$ fällt,
 dann landet man in der mit a_1 bezeichneten Zeile.



S_1 und S_2 seien zwei Wertebereiche.

Stellen wir uns vor: **Wenn** in Stufe 1
die Wahl auf das Element $a_1 \in S_1$ fällt,
dann landet man in der mit a_1 bezeichneten **Zeile**.



Wenn **dann** in Stufe 2
die Wahl auf das Element $a_2 \in S_2$ fällt,
landet man in dem mit (a_1, a_2) bezeichneten **Feld**
(Zeile a_1 , Spalte a_2)

Beispiel B:

$$S_1 = \{1, 2, 3\}, S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

In Stufe 1

wählen wir eine Zahl X_1 aus $\{1, 2, 3\}$.

In Stufe 2 verschieben wir das in Stufe 1 erzielte Ergebnis
mit W'keit $1/2$ um eins nach rechts
und mit W'kt $1/2$ um eins nach links.

Mit anderen Worten:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

ist X_2 uniform verteilt auf $\{a_1 - 1, a_1 + 1\}$.

	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
2	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0
3	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Beispiel C:

$$S_1 = S_2 = \mathbb{R}.$$

In Stufe 1

stellt sich eine reelle Zahl X_1 ein.

In Stufe 2 wird dazu

eine unabhängige standard-normalverteilte ZV'e addiert:

$$X_2 = a_1 + Z$$

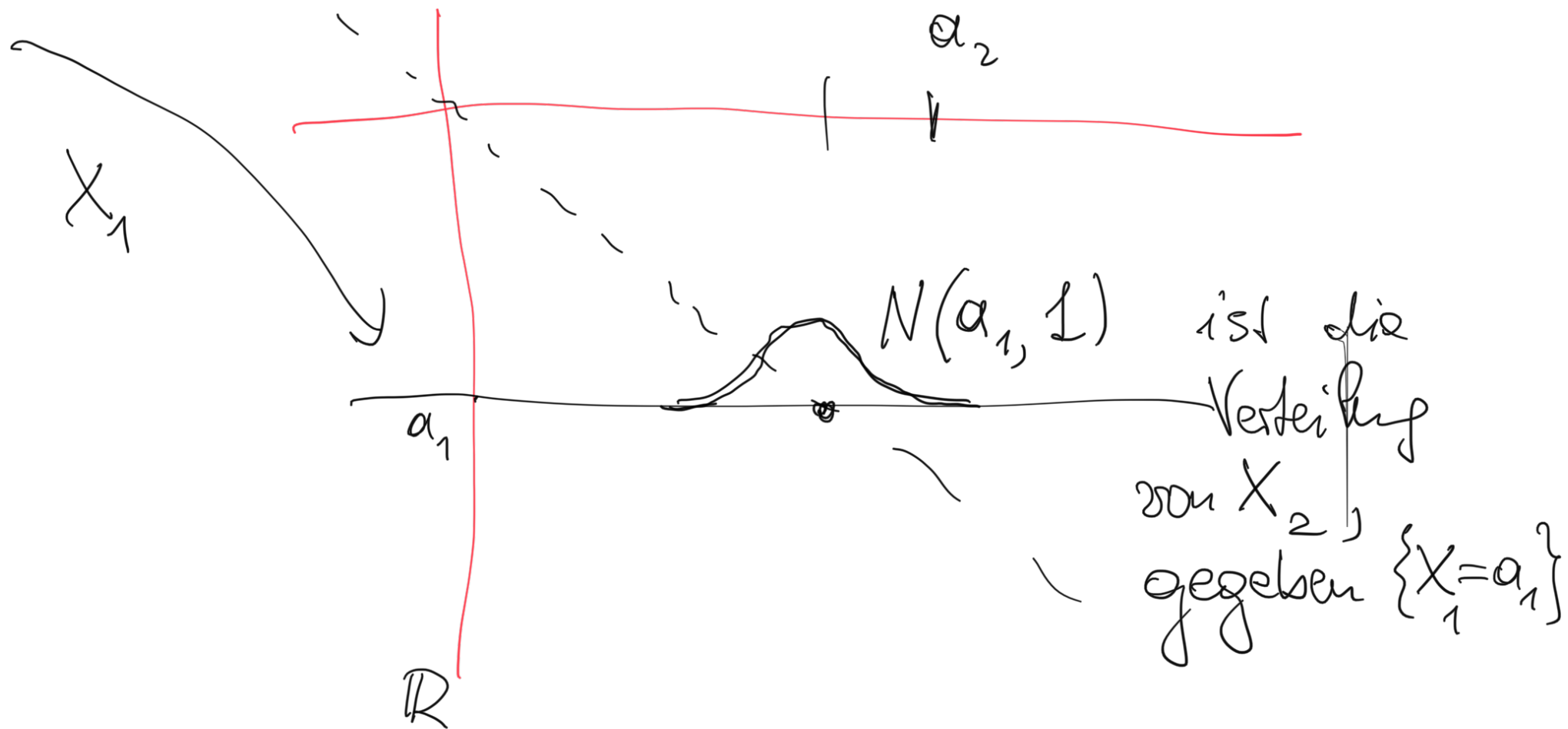
mit $Z \sim N(0,1)$ -
verteilt

Mit anderen Worten:

Gegeben $\{X_1 = a_1\}$

hat X_2 die Verteilung $N(a_1, 1)$.

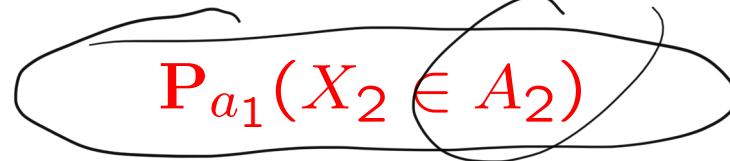
(Dieses Beispiel weist über den diskreten Fall hinaus.)



Für die

W'keit des Ereignisses $\{X_2 \in A_2\}$ gegeben $\{X_1 = a_1\}$

schreiben wir


$$P_{a_1}(X_2 \in A_2)$$

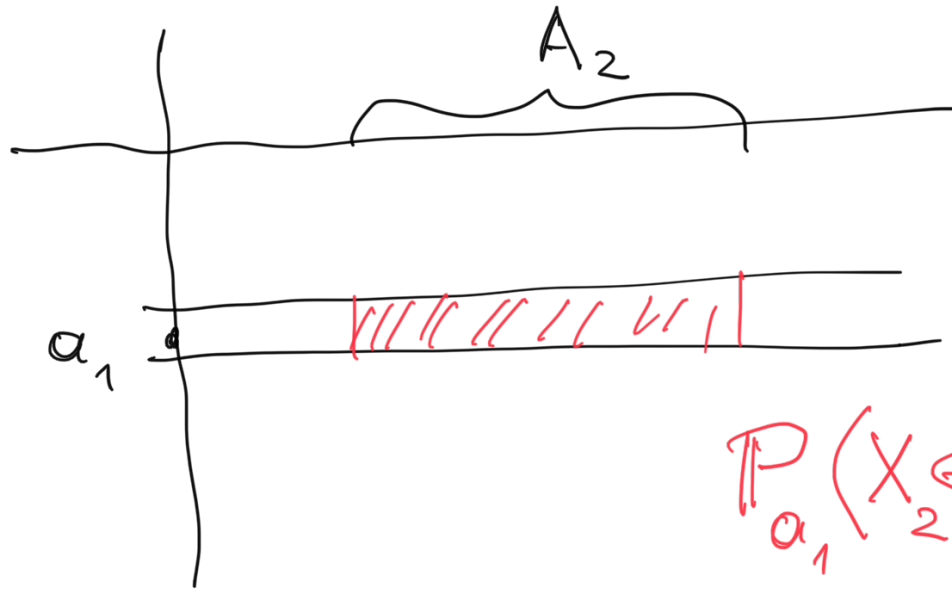
und sprechen von den

Übergangswahrscheinlichkeiten.

Für diskretes S_2

reicht es, die einzelnen Ausgänge a_2 zu betrachten:

$P(a_1, a_2) = P_{a_1}(X_2 = a_2)$, $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$
ist die sogenannte **Übergangsmatrix**.



$$\begin{aligned} P_{a_1}(X_2 \in A_2) &= \sum_{a_2 \in A_2} P_{a_1}(X_2 = a_2) \\ &= \sum_{a_2 \in A_2} P(a_1, a_2) \\ &=: P(a_1, A_2) \end{aligned}$$

Für diskretes S_2

reicht es, die einzelnen Ausgänge a_2 zu betrachten:

$$P(a_1, a_2) = \mathbf{P}_{a_1}(X_2 = a_2), \quad a_1 \in S_1, a_2 \in S_2$$

ist die sogenannte **Übergangsmatrix**.

Man hat dann:

$$P(a_1, A_2) := \sum_{a_2 \in A_2} P(a_1, a_2) = \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2)$$

und kurz:

$$P(a_1, \cdot) = \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in \cdot).$$

Für kontinuierliches $S_2 \subset \mathbb{R}$ hat man
üblicherweise wieder Dichten (statt der Gewichte):

$g_{a_1}(a_2) da_2 = \mathbb{P}_{a_1}(X_2 \in da_2)$, $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$,
heißen die **Übergangsdichten**.

Bsp. C: $g_{a_1}(a_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a_2 - a_1)^2}{2}} = g_{a_1, 1}(a_2)$

Für kontinuierliches $S_2 \subset \mathbb{R}$ hat man
üblicherweise wieder Dichten (statt der Gewichte):
 $g_{a_1}(a_2) da_2 = \mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in da_2)$, $a_1 \in S_1$, $a_2 \in S_2$,
heißen die **Übergangsdichten**.

Man hat dann z.B. für Intervalle $A_2 = [c, d] \subset S_2$:

$$\mathbf{P}_{a_1}(X_2 \in A_2) = \int_c^d g_{a_1}(a_2) da_2.$$